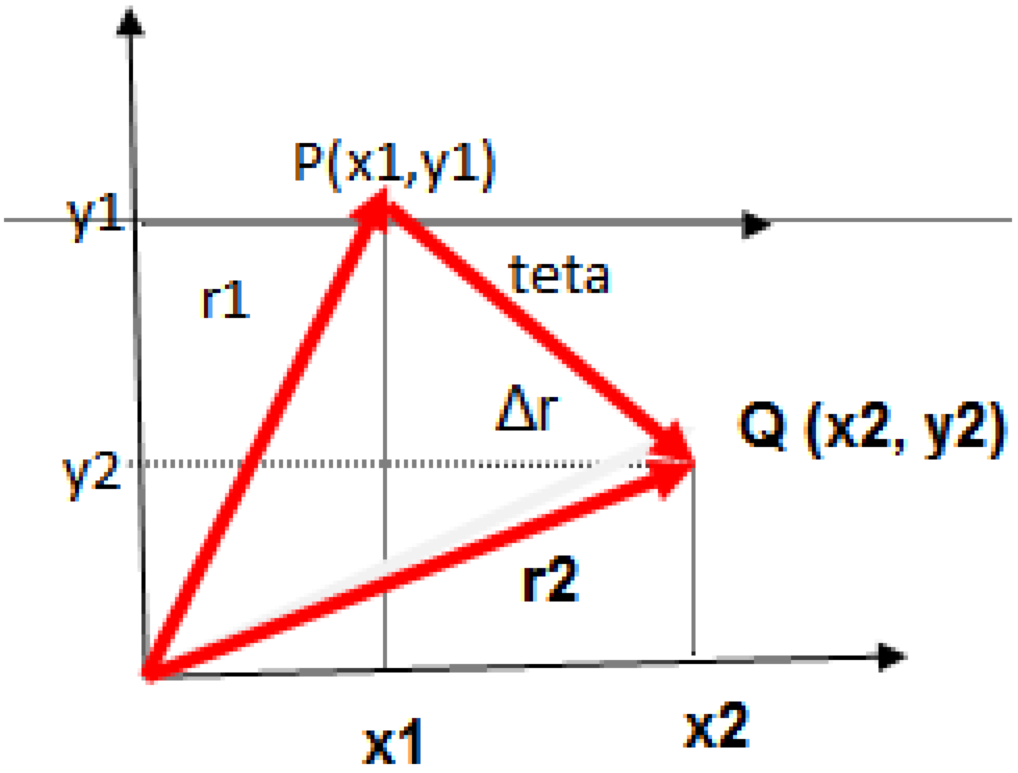
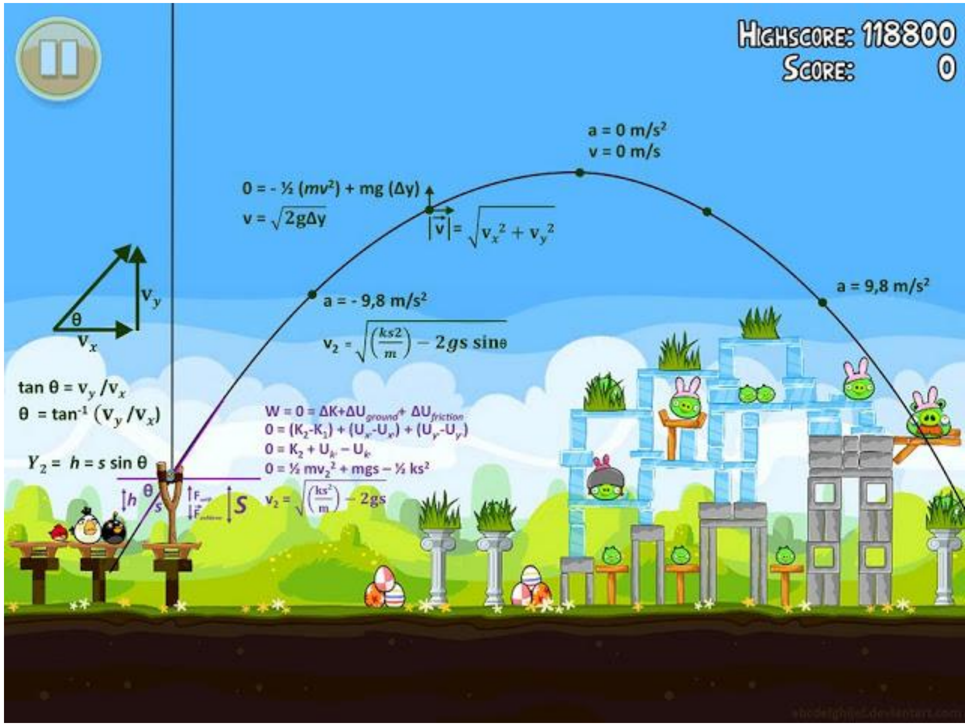
Vektor

Rudi Susanto, M.Si



Contoh Aplikasi

These controls in the cockpit of a commercial aircraft assist the pilot in maintaining control over the velocity of the aircraft—how fast it is traveling and in what direction it is traveling—allowing it to land safely. Quantities that are defined by both a magnitude and a direction, such as velocity, are called *vector quantities*. (Mark Wagner/Getty Images)



Besaran

- Besaran Fisika
  - Konseptual
    - **Besaran Pokok**
      :Besaran yang ditetapkan berdasarkan suatu standar ukuran
    - **Besaran Turunan**
      :Besaran yang dirumuskan dari besaran-besaran pokok
  - Matematis
    - **Skalar**
      :Hanya memiliki nilai
    - **Vektor**
      :Memiliki Nilai dan arah

Besaran Skalar dan Vektor

- **Besaran Skalar**

  Besaran yang cukup dinyatakan oleh besarnya saja (besar dinyatakan oleh bilangan dan satuan).

  Contoh : waktu, suhu, volume, laju, energi

  Catatan : skalar tidak tergantung sistem koordinat

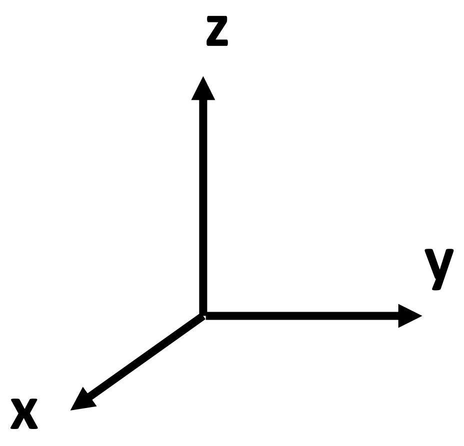
- **Besaran Vektor**

  Besaran yang dicirikan oleh besar dan arah.

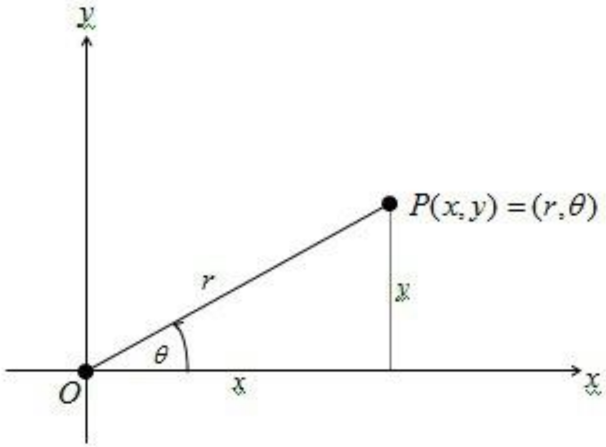
  Contoh : kecepatan, percepatan, gaya

  Catatan : vektor tergantung **sistem koordinat**

Sistem Koordinat

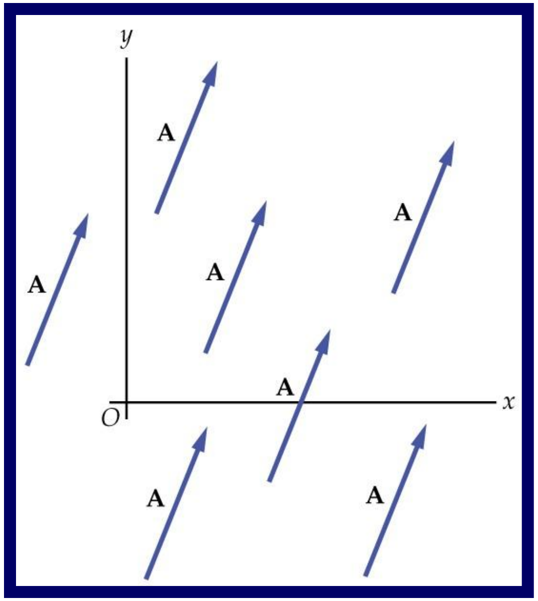


kartesius



polar

Important Notation



- To **describe vectors** we will use:
  - The bold font: Vector A is **A**
  - Or an **arrow** above the vector: $\vec{A}$
  - In the pictures, we will always show vectors as arrows
  - Arrows point the direction
  - To describe the magnitude of a vector we will use absolute value sign: $|\vec{A}|$ or just A,
  - Magnitude is always positive, the magnitude of a vector is equal to the length of a vector.

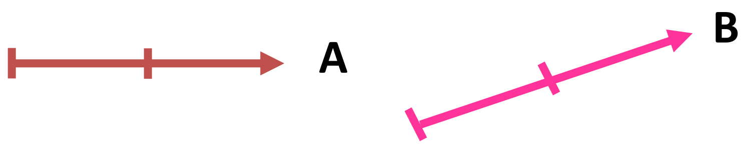
Note

a. **Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama**

A = B

b. **Dua vektor dikatakan tidak sama jika :**

1. **Besar sama, arah berbeda**

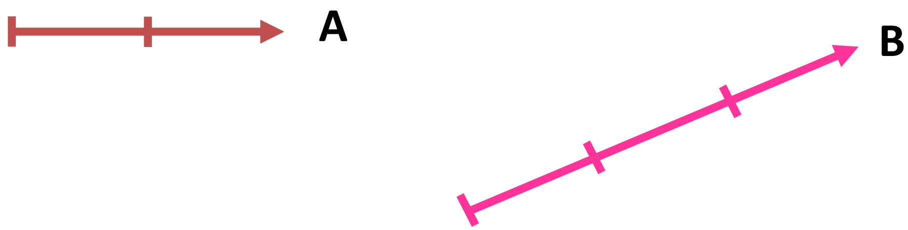


A ≠ B

2. **Besar tidak sama, arah sama**

A ≠ B

3. **Besar dan arahnya berbeda**



A ≠ B

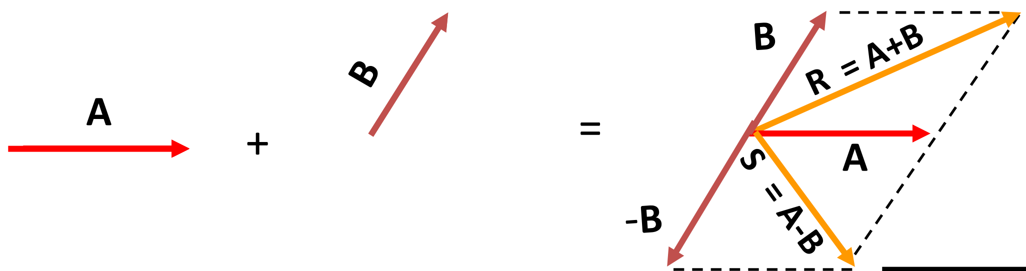
Operasi Matematik Vektor

1.JUMLAH DAN SELISIH VEKTOR

Metode :

1. Jajaran Genjang
2. Segitiga
3. Poligon
4. Uraian

1. Jajaran Genjang



R = A + B

Besarnya vektor R = | R | = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

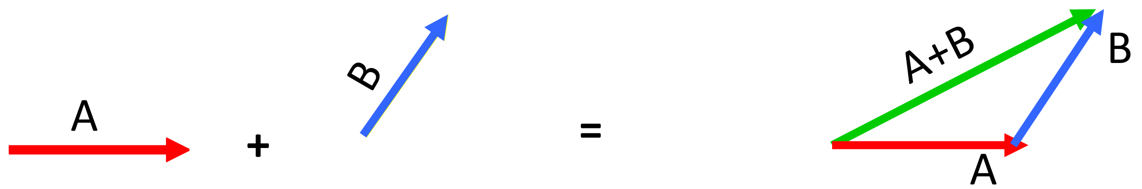
Besarnya vektor A+B = R = |R| = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2\ AB\ \cos\theta}$

Besarnya vektor A-B = S = |S| = $\sqrt{A^2 + B^2 - 2\ AB\ \cos\theta}$

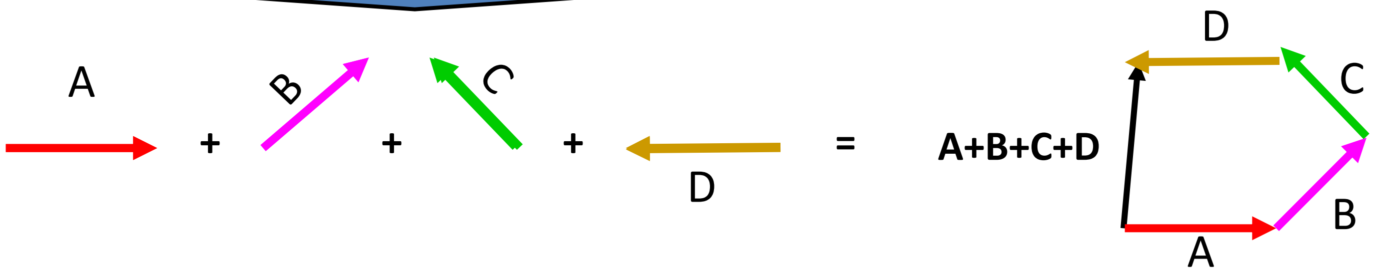
- Jika vektor A dan B searah → $\theta = 0^o$: R = A + B
- Jika vektor A dan B berlawanan arah → $\theta = 180^o$: R = A - B
- Jika vektor A dan B Saling tegak lurus → $\theta = 90^o$: R = 0

Catatan : Untuk Selisih (-) arah Vektor di balik

2. Segitiga

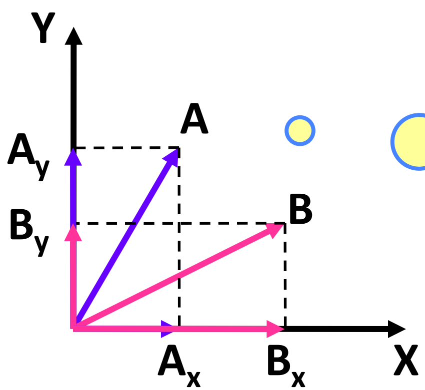


3. Poligon (Segi Banyak)



Uraian

Vektor diuraikan atas komponen-komponennya (sumbu x dan sumbu y)



A = A_x.i + A_y.j ; **B** = B_x.i + B_y.j

A_x = **A** cos θ ; B_x = **B** cos θ

A_y = **A** sin θ ; B_y = **B** sin θ

Besar vektor A + B = |A+B| = |R|

$R_x = A_x + B_x$

$R_y = A_y + B_y$

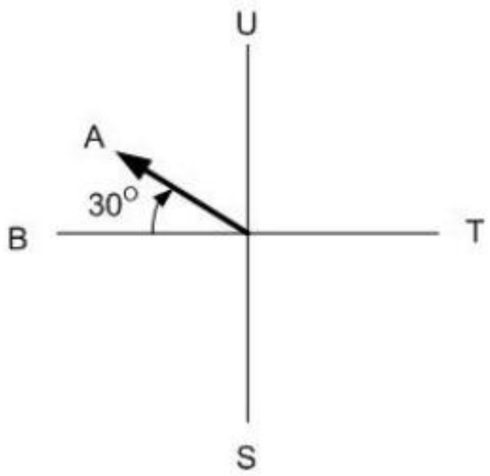
$$|R| = |A + B| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$

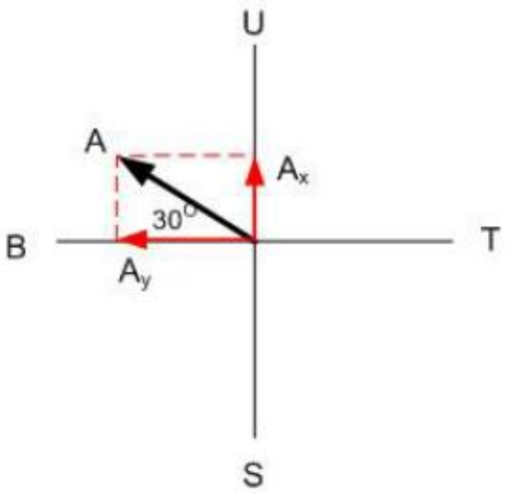
Arah Vektor R (terhadap sb.x positif) = tg θ = $\dfrac{R_y}{R_x}$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{R_y}{R_x}$$

Contoh Soal

<u>CONTOH 1</u> :
Sebuah mobil menempuh 20 km dengan arah 30^O ke utara terhadap arah barat. Dengan menganggap sumbu x menunjukkan arah timur dan sumbu y menunjukkan arah utara, carilah komponen x dan y dari vektor perpindahan mobil itu !





Pembahasan

Pembahasan :

Jika vektor **A** merupakan vektor perpindahan mobil sejauh 20 km dengan arah 30^{O} ke utara terhadap arah barat. Kemudian vektor **A** diproyeksikan terhadap sumbu x dan y seperti gambar disamping, sehingga diperoleh komponen vektor A_x berada pada sumbu x negatif maka komponen vektor A_x bernilai negatif, dan komponen vektor A_y berada pada sumbu y positif maka komponen vektor A_y bernilai positif.

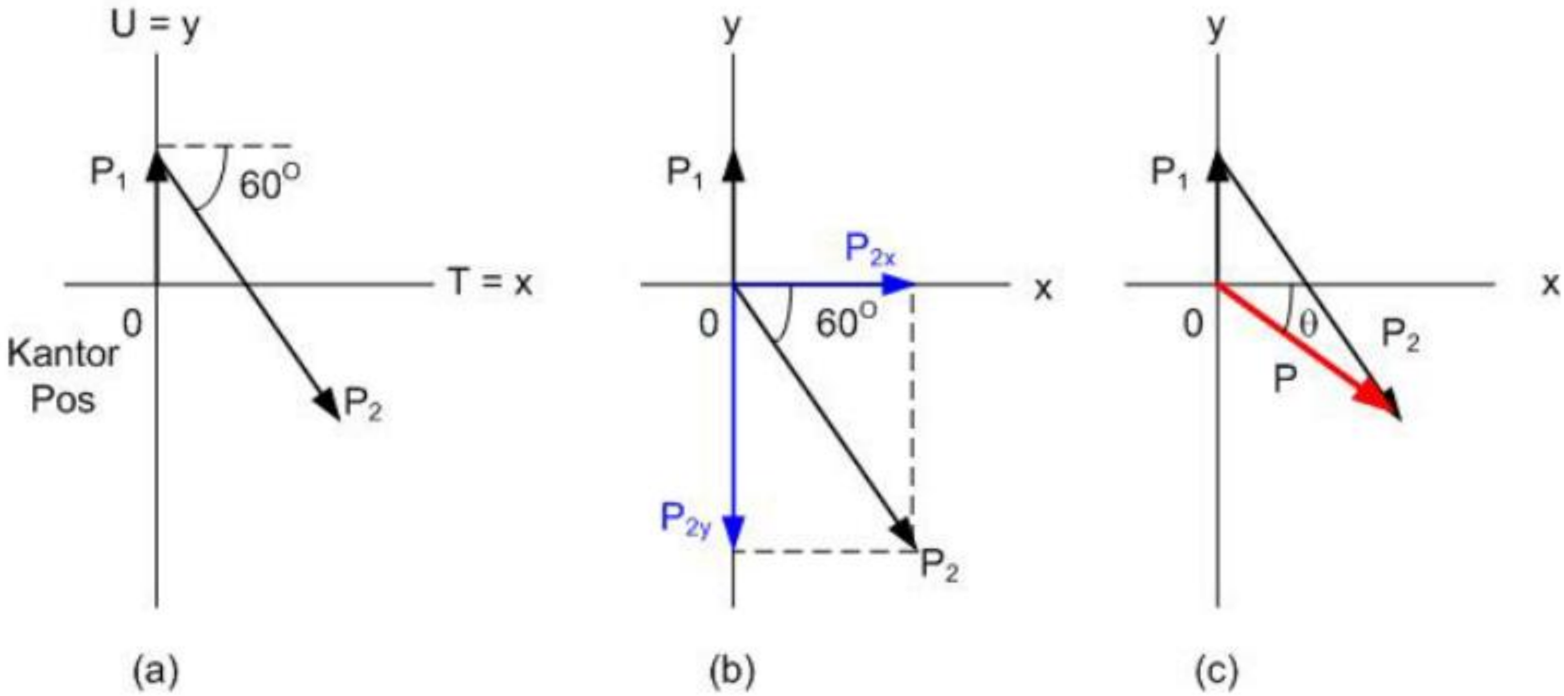
$$A_x = -A\cos\theta = -20\cos 30^{O} = -17{,}32\ km$$

$$A_y = +A\sin\theta = +20\sin 30^{O} = +10\ km$$

Contoh soal

<u>CONTOH 2</u> :
Seorang tukang Pos pedesaan meninggalkan kantor pos dan berkendaraan sejauh 22 km ke arah utara ke kota berikutnya. Ia kemudian meneruskan dengan arah 60^O ke selatan dari arah timur sepanjang 47 km ke kota lainnya. Berapakah perindahannya dari kantor pos ?

Pembahasan



Pembahasan

Jika $\mathbf{P_1}$ adalah vektor perpindahkan pertama dari tukang pos dan $\mathbf{P_2}$ adalah vektor perpindahan kedua dari tukang pos, maka komponen-komponen kedua vektor tersebut pada sumbu x dan y adalah :

$P_{1x} = 0$

$P_{1y} = 22$ km

$P_{2x} = + P \cos\theta = + (47 \text{ km}) (\cos 60^O) = + 23{,}5$ km

$P_{2y} = - P \sin\theta = - (47 \text{ km}) (\sin 60^O) = - 40{,}7$ km

Perhatikan bahwa P_{2y} negatif karena komponen vektor ini menunjuk sepanjang sumbu y negatif. Vektor resultan P, mempunyai komponen-komponen :

$P_x = P_{1x} + P_{2x} = 0 \text{ km} + 23{,}5 \text{ km} = + 23{,}5$ km

$P_y = P_{1y} + P_{2y} = 22 \text{ km} + (-40{,}7 \text{ km}) = - 18{,}7$ km

Maka vektor resultannya :

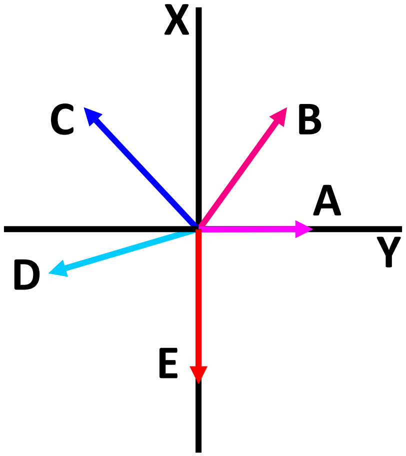
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{(23{,}5\,km)^2 + (-18{,}7\,km)^2} = 30km$$

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-18{,}7\,km}{23{,}5\,km} = -0{,}7957 \quad \rightarrow \quad \theta = -38{,}51^O$$

Tanda negatif berarti $\theta = 38{,}51^O$ berada di bawah sumbu x.

Contoh Soal

1. Lima buah vektor digambarkan sebagai berikut :



Besar dan arah vektor pada gambar di samping :

Vektor	Besar (m)	Arah (°)
A	19	0
B	15	45
C	16	135
D	11	207
E	22	270

Hitung : Besar dan arah vektor resultan.

Jawab :

Vektor	Besar (m)	Arah(^{0})	Komponen X(m)	Komponen Y (m)
A	19	0	19	0
B	15	45	10.6	10.6
C	16	135	-11.3	11.3
D	11	207	-9.8	-5
E	22	270	0	-22
			$R_X = 8.5$	$R_Y = -5.1$

Besar vektor R :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{8.5^2 + (-5.1)^2} = \sqrt{94.01} = 9.67 \text{ m}$$

Arah vektor R terhadap sumbu x positif :

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-5.1}{8.5} = -0,6$$

θ = **329.03^0 (terhadap x berlawanan arah jarum jam)**

2. PERKALIAN VEKTOR

1. Perkalian Skalar dengan Vektor
2. Perkalian vektor dengan Vektor
   a. Perkalian Titik (Dot Product)
   b. Perkalian Silang (Cross Product)

1. Perkalian Skalar dengan Vektor → **Hasilnya vektor**

$$\mathbf{C} = k\,\mathbf{A}$$

k : Skalar

A : Vektor

Vektor **C** merupakan hasil perkalian antara skalar k dengan vektor A

Catatan :
- Jika k positif arah **C** searah dengan **A**
- Jika k negatif arah **C** berlawanan dengan **A**

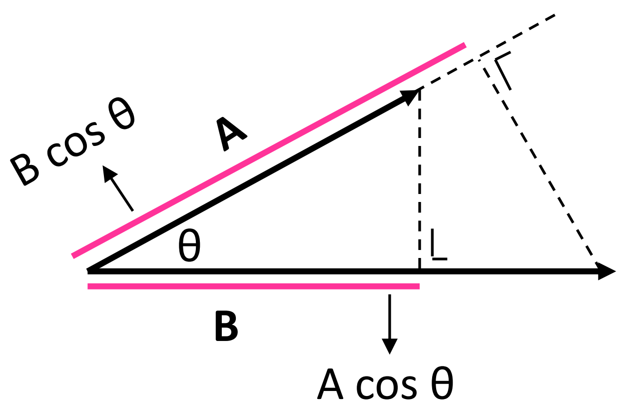
k = 3,

2. Perkalian Vektor dengan Vektor

a. Perkalian Titik (Dot Product) ⇒ Hasilnya skalar

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{C}$

C = skalar



Besarnya : C = |A||B| Cos θ

A = |A| = besar vektor **A**

B = |B| = besar vektor **B**

Θ = sudut antara vektor **A** dan **B**

Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product)

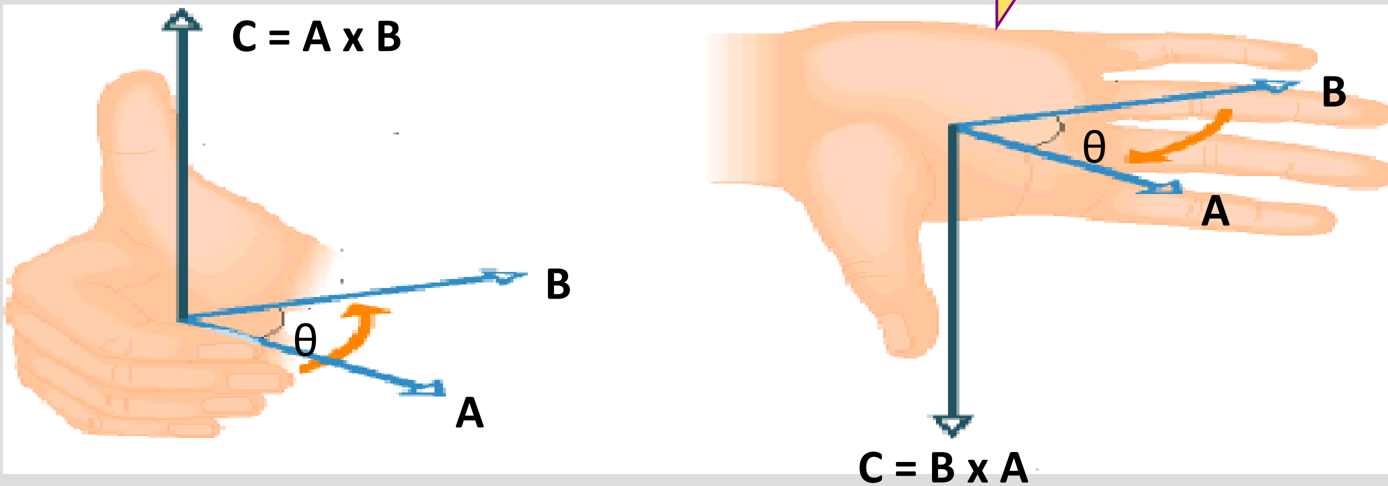
1. **Komutatif : $\mathbf{A \bullet B = B \bullet A}$**
2. **Distributif : $\mathbf{A \bullet (B+C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)}$**

Catatan :

1. Jika A dan B saling tegak lurus → $\mathbf{A \bullet B} = 0$
2. Jika A dan B searah → $\mathbf{A \bullet B} = A \bullet B$
3. Jika A dan B berlawanan arah → $\mathbf{A \bullet B} = - A \bullet B$

b. Perkalian Silang (Cross Product)

Hasilnya vektor



Catatan :

Arah vektor C sesuai aturan tangan kanan

Besarnya vektor C = A x B = A B sin θ

Sifat-sifat :

1. Tidak komunikatif ➔ A x B $\neq$ B x A
2. Jika A dan B saling tegak lurus ➔ A x B = B x A
3. Jika A dan B searah atau berlawan arah ➔ A x B = 0

Vektor Satuan

Vektor yang besarnya satu satuan

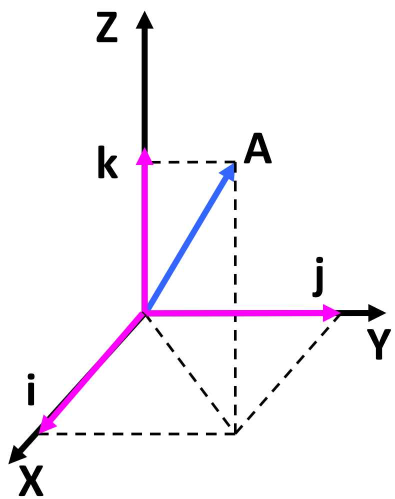
Notasi

$$\hat{A} = \frac{\overline{A}}{\left|A\right|}$$

$$\hat{A} = \left|\hat{A}\right| = \frac{\left|\overline{A}\right|}{\left|A\right|} = 1$$

Besar Vektor

Dalam koordinat Cartesian (koordinat tegak)



Arah sumbu x : $\hat{i}$

Arah sumbu y : $\hat{j}$

Arah sumbu z : $\hat{k}$

$$\boxed{\overline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}$$

➢ **Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product) Vektor Satuan**

$$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = 1$$

$$i \bullet j = j \bullet k = k \bullet i = 0$$

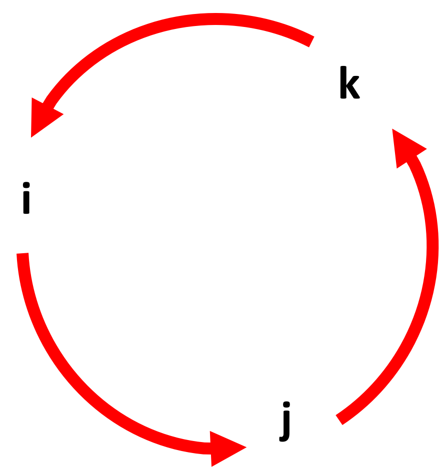
➢ **Sifat-sifat Perkalian silang (Cross Product) Vektor Satuan**

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$



Penulisan dalam vektor satuan :

$$\boxed{\vec{a} \text{ x } \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \text{ x } (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})}$$

$$\boldsymbol{a_x\hat{i} \text{ x } b_x\hat{i} = a_x b_x(\hat{i} \text{ x } \hat{i}) = 0}$$

$$a_x\hat{i} \text{ x } b_y\hat{j} = a_x b_y(\hat{i} \text{ x } \hat{j}) = a_x b_y\hat{k}$$

Hasil akhir :

$$\boxed{\vec{a} \text{ x } \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}}$$

Contoh Soal

1. Diketahui koordinat titik A adalah (2, -3, 4). Tuliskan dalam bentuk vektor dan berapa besar vektornya ?

   Jawab :

   Vektor $A = 2i - 3j + 4k$

   $A = |A| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ satuan

2. Tentukanlah hasil perkalian titik dan perkalian silang dari dua buah vektor berikut ini :

   $A = 2i - 2j + 4k$

   $B = i - 3j + 2k$

   Jawab :

Kerjakan!

Example 1 If $\vec{a} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ and $\vec{b} = \langle -3, 4, 1 \rangle$ compute each of the following.

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) $\vec{b} \times \vec{a}$

Solution

Terima Kasih

Latihan soal :

- Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bertitik tangkap sama saling mengapit dengan sudut α . Jika besar vektor $\vec{a}$ dua kali vektor $\vec{b}$ dan $|a+b|=\sqrt{3}|a-b|$, hitung α !

  Jawab :

$$|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+2\ ab\ \cos\alpha}$$

$$|a-b|=\sqrt{a^2+b^2-2\ ab\ \cos\alpha}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+2\ ab\ \cos\alpha}=\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2-2\ ab\ \cos\alpha}$$

$$16\ b^2\ \cos\alpha=10\ b^2$$

$$\alpha=51{,}32^0$$

- Dua buah vektor yang besarnya 8 dan 15 satuan saling mengapit dengan sudut 45. Hitung besar resultannya dan sudut antara resultan dengan vektor pertama.